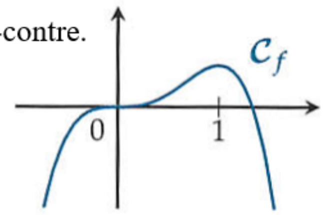
BILAN fin de 1$^{\text{ère}}$ EDS MATHS : fonctions

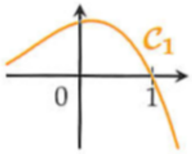
Exercice 1

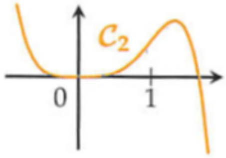
Pour chaque question, une seule réponse proposée est correcte.
Déterminez laquelle en justifiant.

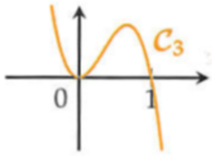
1. On considère une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-contre.
Alors, la fonction f' est représentée par :



a) C_1 b) C_2 c) C_3







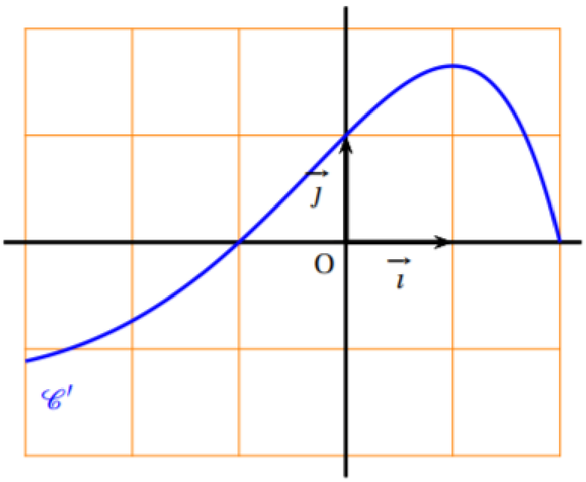
2. Soit $g: x \mapsto (x^2 - 1)\sqrt{x}$. Alors, pour tout réel x strictement positif, $g'(x)$ est égal à :
a) $x\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$ c) $2x\sqrt{x} - \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}}$

3. Soit $h: x \mapsto x - \frac{1}{x}$. La tangente à C_h au point d'abscisse -1 a pour équation :
a) $y = 2x + 2$ b) $y = -2$ c) $y = x + 3$

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-dessous.

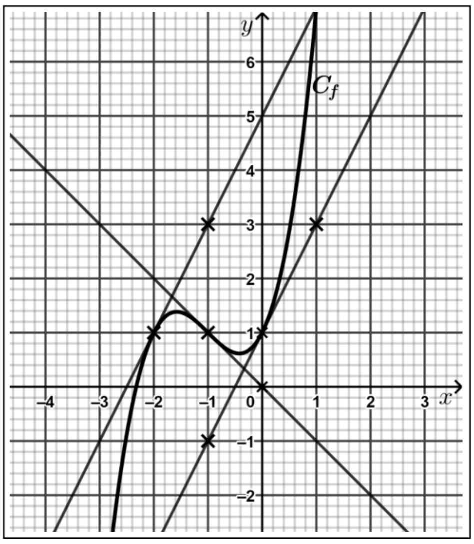


Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;\,0)$.

Exercice 3

Dans la figure ci-contre, on a tracé C_f , la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à C_f aux points d'abscisses -2, -1 et 0.



1. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-1	0
$f(x)$		
$f'(x)$		

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1 .$$

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

3. Dresser le tableau de la variation de la fonction f.

4. Le point $S(-4\ ;\ -3)$ appartient-il à la tangente à C_f au point d'abscisse $x = -2$?

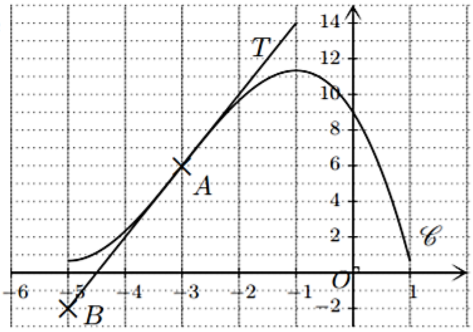
Exercice 4

QCM : Pour chaque question une seule réponse est exacte. Déterminer laquelle en justifiant.

1. L'inéquation $|x| \geqslant 3$ a pour solution dans $\mathbb{R}$:

A : $[-3\ ;\ 3]$; **B :** $]-\infty\ ;\ -3] \cup [3\ ;\ +\infty[$; **C :** $[3\ ;\ +\infty[$.

2. On a représenté dans le repère orthogonal ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 1]$. La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A\,(-3\ ;\ 6)$ et passe par le point $B\,(-5\ ;\ -2)$.



Alors $f'(-3)$ est :

A : égal à 4 ; **B :** égal à 6 ; **C :** négatif.

3. Soit g la fonction définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$. L'expression de $g'(x)$ est :

A : $\dfrac{-2 + 3x\sqrt{x}}{2x^2}$; **B :** $-\dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$; **C :** $\dfrac{-2\sqrt{x} + 3x^2}{x^2 + 2\sqrt{x}}$.

4. Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $(x) = (2x - 5)^3$.

Une expression de la dérivée de f est :

A : $3(2x - 5)^2$ **B :** $6(2x - 5)^2$ **C :** $2(2x - 5)^2$

Exercice 5

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^2 + 4x + 3$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-2;\ +\infty[$.

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{P(x)}{(x+2)^2}$ où f' est la fonction dérivée de f.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-2;\ +\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2;\ +\infty[$.

4. Donner le minimum de la fonction f sur $]-2;\ +\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).

5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{-x+2}{x^2+5}$

On note Cf sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Démontrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. **a.** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \frac{x^2-4x-5}{(x^2+5)^2}$.
3. Déterminer l'abscisse des points de C_f en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
4. **a.** Montrer que l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0 est : $y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$.

   b. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) - \left(-\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{x^2(x-2)}{5(x^2+5)}$.

   c. En déduire la position relative de C_f par rapport à T.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par : $f(x) = 4x + 1 - \frac{1}{3-x}$.

1. Calculer la dérivée de f et montrer que, pour tout réel x différent de 3 : $f'(x) = \frac{(-2x+5)(-2x+7)}{(3-x)^2}$
2. Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} - \{3\}$.
   On donnera les valeurs des extremums.

Exercice 8

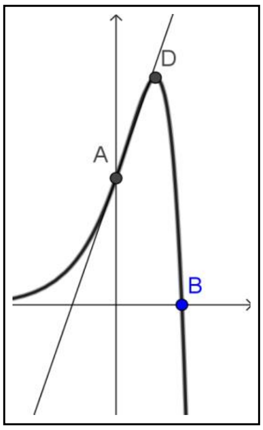
On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$. On note C_f la représentation graphique de f dans un repère du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des ordonnées.
2. La courbe C_f coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.
3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
   Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$. En déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5-2x)e^x$.

On note C_f la courbe représentative de f. Sur la figure ci-contre, on a tracé la courbe C_f dans un repère orthogonal où les unités ont été effacées.



A est le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées et B le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

D est le point de C_f dont l'ordonnée est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les coordonnées des points A et B.
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (3-2x)e^x$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction f.
4. En déduire que le point D admet comme coordonnées $(1{,}5 ; 2e^{1{,}5})$.
5. **a.** Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point A.

   b. Le point D appartient-il à cette tangente ?